文章编号：0465−7942(2026)04−0123−11

一种快速获取最小冗余线性阵列的方法

唐保祥[1]， 任 韩[2]
(1.天水师范大学 数学与统计学院，甘肃 天水 741001；2. 华东师范大学 数学科学学院，上海 200062)

摘要：针对雷达、微波辐射计与无线通信系统中大阵元最小冗余线性阵列(MRLA)获取难题，研究揭示了MRLA与元素个数最少的受限差基、最省刻度尺的刻度值及极小优美图的优美标号之间的数学等价关系.从而证明了以下4点:(1)线性阵列和MRLA都是成对存在的;(2)线性阵列的冗余度都不小于1；(3)阵元数大于4的线性阵列的冗余度都大于1；(4)如果最大连续基线长度是L的MRLA的阵元数是n，则最大连续基线长度是$L+1$的MRLA的阵元数不大于$n+1$.基于这些结论，结合现有文献提供的大规模MRLA的数据分析和实例，研究提出，冗余度不大于1.5的线性阵列都是MRLA，且随着最大连续基线长度或阵元数的无限增加，MRLA的冗余度将趋近于1.5.此外，研究发现了2类全新的线性阵列解析公式，利用这些公式可快速筛选出了2类无穷多MRLA的配置模式.该方法能够根据实际需要灵活调整冗余度的筛选上限，为MRLA的应用提供有力支持.

关键词：线性阵列；最小冗余线性阵列；冗余度；受限差基；最省刻度尺；极小优美图
中图分类号：TN820.15 **文献标识码：**A DOI：10.27051/j.0465−7942.2026040123

0 引 言

最小冗余线性阵列(Minimum−Redundancy Linear Arrays，MRLA)的研究起源于数论领域[1]，由Moffet首次引入射电天文学[2].在雷达探测、无线通信及微波遥感等领域，天线阵列设计的优化对提升系统性能至关重要.MRLA因其在空间分辨率、方向估计准确性及抗干扰能力等方面的优势，成为研究热点[3−19].然而，随着阵元数量增加，MRLA的搜索空间急剧扩大，传统高效算法结合高性能计算机的搜索方法面临资源消耗大、优化效率受限的问题.研究者们已尝试多种算法来寻找低冗余线性阵列，如贪婪算法[5]、粒子群算法[8−10]、蚁群优化算法[12]、数值退火算法[16]、模拟退火算法[17]等.这些方法在阵元数较少时有效，但阵元数增多时，计算复杂度急剧上升，且难以保证全局最优解.例如，不伦瑞克技术大学团队利用高效穷举并行算法结合大规模计算资源，计算量相当于443年CPU时间，才为特定范围内的MRLA找到阵列配置[20−21].

上述各种算法，在求解低冗余线性整列的过程中，各具特色且存在一定局限性.贪婪算法以其每步选择局部最优的策略，实现了高效的执行效率，然而其缺乏全局视野，可能无法获得全局最优解.粒子群算法则凭借快速的收敛速度和天然的并行性，能在较短时间内找到较好解，但同样存在易过早收敛至局部最优的问题.蚁群优化算法通过多个蚂蚁的协作搜索，展现了分布式计算的特点，并用正反馈机制不断收敛，但初期收敛速度较慢，且仍需谨慎处理以避免陷入局部最优.模拟退火算法(包括数值退火)则通过引入随机因素，有效跳出了局部最优的束缚，适用于求解复杂的非凸优化问题，不过其收敛速度相对较慢，要多次迭代才能找到较优解.综上所述，各类算法在追求高效性、全局最优性、并行性等方面各有取舍，但是当最大连续基线长度超过244时，即便采用更高效算法并投入更多的计算资源，其计算复杂度与耗时也将急剧增加，变得极为艰巨乃至不切实际.

针对这一挑战，本文提出基于纯数学框架的MRLA解析构造与筛选策略.首先，构造多样化的线性阵列解析公式，为MRLA设计提供理论模型.然后，设定明确的冗余度上限作为筛选条件，利用计算机自动筛选，快速定位冗余度最小的MRLA.还证明了MRLA与元素最少的受限差基、最省刻度尺的刻度值及极小优美

收稿日期：2025−12−29
基金项目：国家自然科学基金面上项目(11171114)
作者简介：唐保祥(1961−)，男，教授，研究方向:图论及其应用、组合数学、天线设计理论等. E−mail：tbx0618@sina.com

图优美标号之间的数学等价关系,表明线性阵列与MRLA成对存在,且冗余度不小于1.特别地,冗余度不大于1.5的线性阵列均为MRLA,而冗余度大于14/9的则不是.此外,给出了2类新的线性阵列解析公式,并快速筛选出2类无穷多的MRLA配置模式.通过数据分析,提出随着最大连续基线长度或阵元数的无限增加,MRLA的冗余度将渐近于1.5.对所得MRLA的实验模拟检验(如方向性、分辨率、波束宽度、旁瓣电平、增益、旁瓣抑制等)不属于本文研究范围.

1 四个问题的定义及其数学等价性

1.1 四个问题的数学定义

在当前的天线设计领域中,线性阵列、低冗余阵列以及最小冗余线性阵列(MRLA)均缺乏精确且明确的数学定义,同时,关于冗余度最小化的概念也未能得到清晰而准确的阐述.因此,确立MRLA与具有最少元素个数的受限差基、最省刻度尺的刻度值、以及极小优美图的优美标号之间存在的数学等价关系,对于有效搜寻和构建MRLA具有至关重要的意义.

定义1 设L,n是正整数,在长为L(任意一个$L\geqslant 1$的整数)个单位的无刻度的直尺上添加n个刻度(包括直尺两端的刻度),使得该直尺可以度量1至L之间任何整数单位长度的尺寸,求n的值最少是多少 这就是著名的最省刻度尺(又称完美稀疏尺)问题.这个问题的一般情形至今未得到解决[22].

将上述定义用数学语言表示即为:在长度为$L(L\geqslant 1$的整数)的无刻度直尺上,添加n个刻度$a_1,a_2,\cdots,a_n$,如果满足3个条件:(1) $0=a_1<a_2<\cdots<a_n=L$; (2)任意$k\in\{1,2,\cdots,L\}$,存在$a_i,a_j\in\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$,使得$a_j-a_i=k(j>i)$; (3) n取最小值,则称此直尺为最省刻度尺.

例如,在长度是6的无刻度直尺上标记刻度0,1,4,6或0,2,5,6就是两把最省刻度尺.

定义2 给定正整数L,若整数序列$\{a_i\}$满足: (1) $0=a_1<a_2<\cdots<a_n=L$; (2) 对任意$k\in\{1,2,\cdots,L\}$, 存在$i<j$使得$a_j-a_i=k$则称$\{a_i\}$为L上的一个受限差基(或有限差基)[1,19].

定义3 设$G=(V(G),E(G))$是一个没有孤立顶点的图.如果存在单射

$$f:V(G)\to\{0,1,\cdots,|V(G)|\},$$

使得任意$e=uv\in E(G)$,由$g(e)=|f(u)-f(v)|$诱导出双射

$$g:E(G)\to\{1,2,\cdots,|E(G)|\},$$

则称G为优美图,f被称为G的优美标号,而g被称为由f诱导的边标号.给定边数的优美图中顶点数最少的优美图称为极小优美图[22].

定义4 称L上的受限差基$\{a_i\}$为最大连续基线长度是L的线性阵列,n称为它的阵元数, $R=\dfrac{n(n-1)}{2L}$称为它的冗余度.把冗余度R最小的线性阵列叫做最小冗余线性阵列.

因此,最小冗余线性阵列就是元素数最少的一个受限差基,或者说是阵元数最少的一个线性阵列.

定义5 首项是零的整数数列,若元素排列有一定的规律,例如以0为首项的数列的排列规律为

$$0,\overbrace{1}^{1},\overbrace{5}^{4},\overbrace{9}^{4},\overbrace{16}^{7},\overbrace{23}^{7},\overbrace{30}^{7},\overbrace{37}^{7},\overbrace{40}^{3},\overbrace{42}^{2},\overbrace{43}^{1},$$

为了书写方便,将它简记为$1,4^2,7^4,3,2,1$,称之为该数列的配置.因此,每个线性阵列都有唯一的配置.

1.2 四个问题的数学等价性论证

最省刻度尺问题旨在求解在长度为L的无刻度直尺上,最少需添加n个刻度(含两端点),以精确测量1至L间所有整数长度,n的最小值即为所求,亦称完美稀疏尺或完美尺问题[22].以符号语言表述,即得定义1.依据定义1与定义2,长度L的最省刻度尺的刻度值等同于L上元素数量最少的一个受限差基;反之亦然,L上元素数量最少的受限差基,对应着长度L的最省刻度尺的n个刻度值.因此,两者等价.

定义4阐明,L上的受限差基与最大连续基线长度为L的线性阵列系同一数学概念.在给定最大连续

基线长度的线性阵列中，冗余度最小的线性阵列即为MRLA，其要求阵元数n最小．故最大连续基线长度为L的MRLA，等同于L上元素数量最少的受限差基．因此，MRLA与长度L的最省刻度尺刻度值亦等价，文献[20]亦证实了MRLA计算与最省刻度尺设计的等价性．

由定义2与3可知，含有L条边n个顶点的优美图的顶点优美标号，恰为L上的一个受限差基；反之，L上的一个受限差基的n个元素，亦恰为含有L条边n个顶点的优美图的顶点优美标号．因此，两者存在唯一对应关系．所以，含有L条边且顶点数最少的优美图的顶点优美标号，即L上元素数量最少的受限差基．

综上所述，连续基线长度为L的MRLA、长度L的最省刻度尺刻度值、L条边的极小优美图优美标号、以及元素最少且最大元素为L的受限差基，此四者实为等价的数学问题．

一个受限差基对应一个优美图的优美标号；最少元素的受限差基对应极小优美图的优美标号；该优美标号又对应一把最省刻度尺的刻度值；同样，MRLA的数值也等同于最省刻度尺的刻度值．因此，优美图的标号理论可用于研究最省刻度尺设计，进而探索MRLA的寻找[22]．

例如，最大连续基线长度是13的MRLA共有6个，它们分别是：(1) 0,3,7,11,12,13; (2) 0,2,8,9,12,13; (3) 0,2,4,7,12,13; (4) 0,1,6,9,11,13; (5) 0,1,4,5,11,13; (6) 0,1,2,6,10,13.

上述每一个MRLA分别对应着长度是13个单位的最省刻度尺的刻度值，如图1所示．

最省刻度尺(6) 0,1,2,6,10,13总共有4种不同的度量方式：

(a) 0,1|0,2|10,13|2,6|1,6|0,6|6,13|2,10|1,10|0,10|2,13|1,13|0,13|;

(b) 0,1|0,2|10,13|6,10|1,6|0,6|6,13|2,10|1,10|0,10|2,13|1,13|0,13|;

(c) 1,2|0,2|10,13|2,6|1,6|0,6|6,13|2,10|1,10|0,10|2,13|1,13|0,13|;

(d) 1,2|0,2|10,13|6,10|1,6|0,6|6,13|2,10|1,10|0,10|2,13|1,13|0,13|.

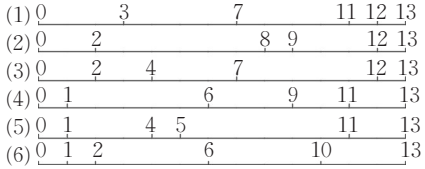


图1 长度是13的最省刻度尺的所有6种刻度值

Fig.1 All 6 scale values of the perfect sparse ruler with length 13

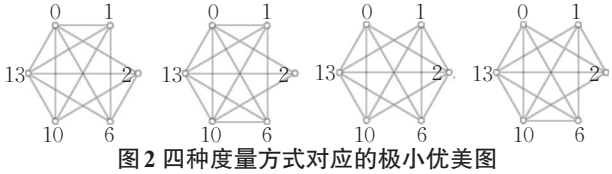


图2 四种度量方式对应的极小优美图

Fig.2 Minimal graceful graphs corresponding to 4 measurement methods

上述每一种度量方式，唯一对应着一个有6个顶点、13条边的极小优美图，如图2所示．

定理1　如果边数是L的极小优美图的顶点数是n，那么边数是$L+1$的极小优美图的顶点数至多是$n+1$.

证明　假设边数为L的极小优美图G_1的顶点数为n，因为图G_1的优美标号中必有一个顶点v的标号为数0，那么再给图G_1的顶点v添加一条悬挂边vu得到的图为G_2，并且给顶点u标号为$L+1$，图G_2显然是优美图．所以，当边数为L的极小优美图的顶点数为n时，边数为$L+1$的极小优美图的顶点数至多是$n+1$.

由MRLA与极小优美图的优美标号之间的等价关系就有下面的推论．

推论1　最大连续基线长度是L的MRLA的阵元数是n，则最大连续基线长度是$L+1$的MRLA的阵元数必不大于$n+1$.

定理2　若$a_1,a_2,\cdots,a_n$ $(0=a_1<a_2<\cdots<a_n=L)$是一个基线长度为L的MRLA，则$L-a_n$, $L-a_{n-1},\cdots,L-a_1$也是一个基线长度为L的MRLA.

证明　因为MRLA值$a_1,a_2,\cdots,a_n$是一组最省刻度尺的刻度值，所以$a_1,a_2,\cdots,a_n$这中能选出L对数，使大数与小数之差恰好是$1,2,\cdots,L$. 令$b_1=L-a_1,b_2=L-a_2,\cdots,b_n=L-a_n$. 因为假设$b_j-b_i=a_j-a_i=k\ (1\leqslant k\leqslant L)$，所以$b_n,b_{n-1},\cdots,b_1$也是一组最省刻度，即$L-a_n,L-a_{n-1},\cdots,L-a_1$是一组最省刻度，从而是一组MRLA.

称线性阵列$L-a_n,L-a_{n-1},\cdots,L-a_1$为线性阵列$a_1,a_2,\cdots,a_n$的共轭线性阵列．例如，基线长度为36的一个MRLA为0,1,5,9,16,23,30,33,35,36，它的共轭线性阵列为0,1,3,6,13,20,27,31,35,36. 特别地，

一个线性阵列的共轭线性阵列可能就是它自己.例如,线性阵列0,1,3,4的共轭线性阵列是它自身.

定理3 最大连续基线长度是L ($L \geqslant 1$)的线性阵列$a_1,a_2,\cdots,a_n$的冗余度$R \geqslant 1$.

证明 把$a_1,a_2,\cdots,a_n$看成长度为L的直尺上的n个刻度,由L上的受限差基定义可知,此直尺能够度量1至L间任意整数长度,所以直尺上这n个刻度点至少能形成L条线段,所以

$$R=\frac{C_n^2}{L}=\frac{n(n-1)}{2L}\geqslant 1.$$

定理4 当$n \geqslant 5$时,最大连续基线长度是L的线性阵列$a_1,a_2,\cdots,a_n$的冗余度$R>1$.

证明 假设对某个$n \geqslant 3$,该线性阵列的冗余度$R=\frac{C_n^2}{L}=1$,则$L=C_n^2$.因为$0=a_1<a_2<\cdots<a_n=L$,把$a_1,a_2,\cdots,a_n$看成长度为L的直尺上的n个刻度数值,则n个刻度把尺子分成了$n-1$段,直尺的总长度是

$$L=C_n^2=\frac{n(n-1)}{2},$$

所以1至L间的每一个长度唯一对应着直尺上两刻度之间的一段"线段长度",因此

$$\{a_j-a_i \mid 1 \leqslant i<j \leqslant n\}=\{1,2,\cdots,L\}.$$

令$d_i=a_{i+1}-a_i$,则$d_i>0$, $i=1,2,\cdots,n-1$.因为$\sum_{i=1}^{n-1}d_i=L=\sum_{i=1}^{n-1}i$, 所以必有

$$\{d_1,d_2,\cdots,d_{n-1}\}=\{1,2,\cdots,n-1\},$$

且

$$d_j+d_{j+1}\in\{n,n+1,\cdots,m\},\ j=1,2,\cdots,n-2.$$

不妨设$d_1=1$,因为第1段与第2段邻接,且$d_1+d_2\in\{n,n+1,\cdots,m\}$,所以必有$d_2=n-1$.假设$d_3\neq 2$, $d_k=2(k>3)$,则出现$d_{k-1}+d_k\notin\{n,n+1,\cdots,m\}$或$d_k+d_{k+1}\notin\{n,n+1,\cdots,m\}$的矛盾结果,故$d_3=2$.因此不存在$d_4$,否则,若$d_4=n-2$,则$d_3+d_4=d_1+d_2=n$,这与直尺上不同段度量的唯一性矛盾;若$d_4<n-2$,则出现$d_3+d_4\notin\{n,n+1,\cdots,m\}$的矛盾,即$n=4$.故当刻度数$n \geqslant 3$且$R=\frac{C_n^2}{L}=1$时,一定是$n=4$.换一句话说,当$n \geqslant 5$时,不可能有$R=1$.故命题成立.

由定理3和定理4可知,所有线性阵列的冗余度不小于1,冗余度是1的线性阵列是零冗余线性阵列,阵元数大于4的最小冗余线性阵列的冗余度也一定大于1.易知,零冗余线性阵列总共有5个,分别是

$$0,1;\ 0,2,3;\ 0,1,3;\ 0,2,5,6;\ 0,1,4,6.$$

2 线性阵列按冗余度分类

2.1 大数据分析MRLA特性

针对最大连续基线长度相同的MRLA(最小冗余线性阵列),通常存在多种阵列配置.德国不伦瑞克技术大学的研究团队,针对最大连续基线长度从1至244的每一个MRLA,均至少计算出了其一种配置,具体结果可参见文献[20–21].数据揭示,当按最大连续基线长度对MRLA进行分类时,仅在基线长度为18和135时,冗余度达到最大值14/9,其余均小于此值;其中,209类MRLA的冗余度不超过1.5(占比约85.66%),剩余的35类则介于1.5与14/9之间.随着阵元数的增加,MRLA冗余度的最小值呈现上升趋势;而当阵元数固定,最大连续基线长度增大时,冗余度则先增后减,这与冗余度的定义相吻合.在244类MRLA中,随着最大连续基线长度的增长,阵元数总体呈上升趋势,但也存在特例,即基线长度增加时阵元数反而减少.例如,基线长度为136的MRLA有21个阵元,而长度为137的则仅有20个.根据定理1,若MRLA的最大连续基线长度为L,阵元数为n,则当最大连续基线长度增至$L+1$时,新MRLA的阵元数至多为$n+1$,即保持不变或至多增加1,特殊情况下可能减少1.特别指出,对于最大连续基线长度不超过244的所有线性阵列,冗余度不超过1.5的均为MRLA;而冗余度介于1.5与14/9之间的线性阵列,并不全是MRLA.如表1所示,左栏列出了18个此类

表1 最大连续基线长度不大于244的非MRLA与MRLA的对比

Table 1 Comparison between non-MRLA and MRLA with maximum continuous baseline length not exceeding 244

冗余度大于1.5的非MRLA的配置				冗余度不大于1.5的MRLA的配置			
阵元数	基线长	阵列配置	冗余度	阵元数	基线长	阵列配置	冗余度
10	**29**	$1^3,11,4,3^3,2$	1.551 7	9	**29**	$1^2,12,4,3^3,2$	1.241 4
11	**36**	$1^3,3,7^3,4^2,1$	1.527 8	10	**36**	$1,2,3,7^3,4^2,1$	1.250 0
12	**43**	$1^3,3,7^4,4^2,1$	1.534 9	11	**43**	$1,2,3,7^4,4^2,1$	1.279 1
15	**68**	$1^3,2,5^2,11^3,6^3,1^2$	1.544 1	14	**68**	$1^2,3,5^2,11^3,6^3,1^2$	1.338 2
16	**79**	$1^3,2,5^2,11^4,6^3,1^2$	1.519 0	15	**79**	$1^2,3,5^2,11^4,6^3,1^2$	1.329 1
17	**90**	$1^3,2,5^2,11^5,6^3,1^2$	1.511 1	16	**90**	$1^2,3,5^2,11^5,6^3,1^2$	1.333 3
18	**101**	$1^3,2,5^2,11^6,6^3,1^2$	1.514 9	17	**101**	$1^2,3,5^2,11^6,6^3,1^2$	1.346 5
19	**110**	$1^2,4,1,5,9^{10},4,3,1$	1.554 5	18	**110**	$1^2,3,5^4,11,16,11,6,11,16,6^2,1^2$	1.390 9
19	**111**	$1^2,2^2,1,7^3,16^3,9^2,2,9,2^3$	1.540 5	18	**111**	$1^2,3,5^3,11^7,6^2,1^2$	1.378 4
19	**112**	$1^3,2,5^2,11^7,6^3,1^2$	1.526 8	18	**112**	$1^2,3,5^2,11^7,6^3,1^2$	1.366 1
20	**123**	$1^3,2,5^2,11^8,6^3,1^2$	1.544 7	19	**123**	$1^2,3,5^2,11^8,6^3,1^2$	1.390 2
21	**138**	$1^4,3,7^3,15^5,8^4,1^3$	1.521 7	20	**138**	$1^3,4,7^3,15^5,8^4,1^3$	1.376 8
22	**153**	$1^4,3,7^3,15^6,8^4,1^3$	1.509 8	21	**153**	$1^3,4,7^3,15^6,8^4,1^3$	1.372 5
23	**167**	$1^2,2,1,5^2,12^{11},7,2,7,2^2$	1.515 0	22	**167**	$1^3,4,7^4,15^7,8^3,1^3$	1.383 2
23	**168**	$1^4,3,7^3,15^7,8^4,1^3$	1.506 0	22	**168**	$1^3,4,7^3,15^7,8^4,1^3$	1.375 0
24	**183**	$1^4,3,7^3,15^8,8^4,1^3$	1.508 2	23	**183**	$1^3,4,7^3,15^8,8^4,1^3$	1.382 5
25	**197**	$1^5,10,1,11^4,21^4,10^4,9,1^4$	1.522 8	24	**197**	$1^3,4,7^4,15^9,8^3,1^3$	1.401 0
25	**198**	$1^4,3,7^3,15^9,8^4,1^3$	1.515 1	24	**198**	$1^3,4,7^3,15^9,8^4,1^3$	1.393 9
26	**212**	$1^3,6,1,7^2,13^{13},6^2,5,1^2$	1.533 0	25	**212**	$1^3,4,7^3,15^{10},8^3,1^3$	1.415 1
26	**213**	$1^4,3,7^3,15^{10},8^4,1^3$	1.525 8	25	**213**	$1^3,4,7^3,15^{10},8^4,1^3$	1.408 5
27	**232**	$1^5,4,9^4,19^7,10^5,1^4$	1.512 9	26	**232**	$1^4,5,9^4,19^7,10^5,1^4$	1.400 9

线性阵列，右栏则为对应最大连续基线长度的MRLA(均来自文献[21]中的MRLA数据库).

基于上述数据分析的结果，提出以下猜想:对于所有线性阵列，若其冗余度满足不大于1.5的条件，则该线性阵列必然是MRLA(最小冗余线性阵列).

下面的定理5说明，存在无穷多的最大连续基线长度是任意长的、冗余度大于1.5且不大于14/9的线性阵列都不是MRLA.

定理5　任意正整数t，配置式分别为

$$f(t)=1^t,t+1,(2t+1)^t,(4t+3)^{2t},(2t+2)^{t+1},1^t,$$
$$g(t)=1^{t+1},t,(2t+1)^t,(4t+3)^{2t},(2t+2)^{t+1},1^t,$$
$$h(t)=1,2^{t+1},(2t+3)^t,(4t+4)^{2t+2},(2t+1)^t,1,2^t,$$
$$w(t)=1^3,2^t,(2t+3)^t,(4t+4)^{2t+2},(2t+1)^t,1,2^t.$$

的数列都是线性阵列.

线性阵列$f(t)$和$g(t)$的阵元数分别为$6t+3$和$6t+4$，最大连续基线长度均为$12t^2+14t+3$;线性阵列$h(t)$和$w(t)$的阵元数分别为$6t+6$和$6t+7$，最大连续基线长度均为$12t^2+34t+12$.

设线性阵列$f(t),g(t),h(t)$和$w(t)$的冗余度分别为R_f,R_g,R_h,R_w，则

$$R_f=\frac{3}{2}-\frac{12t+3}{2(12t^2+14t+3)},\ \lim_{t\to\infty}R_f=\frac{3}{2};$$
$$R_g=\frac{3}{2}+\frac{3}{2(12t^2+14t+3)},\ \lim_{t\to\infty}R_h=\frac{3}{2};$$

$$R_h=\frac{3}{2}-\frac{1}{4(t+1)},\ \lim_{t\to\infty}R_h=\frac{3}{2};$$
$$R_w=\frac{3}{2}+\frac{1}{4(t+1)^2},\ \lim_{t\to\infty}R_w=\frac{3}{2}.$$

2.2 线性阵列的分类

定理5说明,对于任意正整数t,线性阵列$g(t)$和$w(t)$都不是MRLA,因为存在与它们具有相同最大连续基线长度的阵元数更少(即冗余度更低)的线性阵列$f(t)$和$h(t)$.这就是说,存在着最大连续基线长度可以任意长的、冗余度大于1.5且不大于14/9的线性阵列都不是MRLA.

在最大连续基线长度不大于244的所有线性阵列中,已经明确冗余度不大于1.5线性阵列都是MRLA,冗余度大于1.5且不大于14/9的线性阵列中,既有MRLA,也有非MRLA.目前,在最大连续基线长度大于244的线性阵列中,还没有发现冗余度大于14/9的线性阵列是MRLA.

基于上述事实,提出MRLA、低冗余线性阵列(Low-Redundancy Linear Array, LRLA)和非MRLA的推断:所有冗余度不大于1.5的线性阵列一定都是MRLA;所有冗余度不大于14/9的线性阵列定义为LRLA;冗余度大于14/9的线性阵列都不是MRLA.

3 由线性阵列解析公式筛选MRLA

前述表明,MRLA等价于寻求:最省刻度尺刻度值[20]、极小优美图标号[22]及最少元素受限差基[5].文献[9,13,15,18]用受限差基来构造LRLA.本文给出基于双变量参数的线性阵列解析公式快速筛选MRLA的方法.

定理6 任意正整数s和t,配置为

(1) $\sigma(t,s)=1^{t+2},2t+4,1,(2t+5)^t,(4t+9)^s,(2t+4)^{t+2},t+3,1^{t+1}$;

(2) $\tau(t,s)=1^2,2^t,1,(2t+3)^{t+1},(4t+8)^s,(2t+5)^t,2,2t+5,2^{t+1}$

的数列都是线性阵列.

定理5,6的证明,要用优美图的标号理论,证明过程冗长,故定理5,6的证明略去.

将定理6中线性阵列公式中的t和s分别取为1,2,…等,当它的冗余度不大于1.5时,输出t和s的值及对应的阵列配置,就可筛选出满足要求的线性阵列,即可得到对应MRLA的阵列配置.文章篇幅所限,表2中仅给出了$t=5,6$且t和s的取值满足阵列的冗余度不大于1.5的那些阵列的配置.特别地,表2中的这些MRLA的阵列配置是首次出现.实际应用时,可按照需要调整筛选线性阵列余度的上限,扩充表2的内容.

4 结果的验证与评估

本文提出一种通过双变量线性阵列解析公式直接筛选最小冗余线性阵列(MRLA)的方法.具体而言,首先依据公式中的变量,推导出阵元数和最大连续基线长度的表达式,进而得到含双变量的冗余度计算公式.接着,将正整数代入该冗余度计算公式,筛选出冗余度不大于1.5的对应线性阵列,并将公式中的双变量替换为对应的正整数,从而输出该线性阵列,即得到相应冗余度的MRLA.整个计算过程与现有文献中借助高效算法和高性能计算机计算低冗余线性阵列的方法截然不同.本方法无需借助高效算法和高性能计算机,仅通过手工或简单程序,即可依据冗余度上限不大于1.5快速筛选出满足要求的线性阵列,耗时几乎仅等同于输入输出时间.理论上,该方法可计算任意最大连续基线长度的MRLA,极大提高了计算效率.主要结果在于论证了冗余度不超过1.5的线性阵列均属于最小冗余线性阵列(MRLA)的范畴,并找到了两类全新的线性阵列解析表达式,据此筛选出了两类无限多个冗余度不超过1.5的线性阵列.截至目前,尚未有充分的理论条件能够判定一个线性阵列是否为最小冗余线性阵列.为支持"冗余度不超过1.5的线性阵列均为MRLA"的论断,本文采用以下3种方法进行验证:(1)依据定理6的公式,筛选出冗余度不超过1.5且最大连续基线长度不超过

表2 由定理6中公式筛选出的部分最小冗余线性阵列配置

Table 2 Partial minimal redundant linear array configurations selected by the formula in Theorem 6

t,s的取值		最小线性阵列的配置	基线长度	阵元数	冗余度	t,s的取值		线性阵列的配置	基线长度	阵元数	冗余度
t	s	$1^{t+2},2t+4,1,(2t+5)^t,(4t+9)^s,(2t+4)^{t+2},t+3,1^{t+1}$	L	n	R	t	s	$1^2,2^t,1,(2t+3)^{t+1},(4t+8)^s,(2t+5)^t,2,2t+5,2^{t+1}$	L	n	R
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
	9	$1^7,14,1,15^5,29^9,14^7,8,1^6$	470	38	1.495 7		9	$1^2,2^5,1,13^6,28^9,15^5,2,15,2^6$	447	37	1.489 9
	10	$1^7,14,1,15^5,29^{10},14^7,8,1^6$	499	39	1.485 0		10	$1^2,2^5,1,13^6,28^{10},15^5,2,15,2^6$	475	38	1.480 0
	11	$1^7,14,1,15^5,29^{11},14^7,8,1^6$	528	40	1.477 3		11	$1^2,2^5,1,13^6,28^{11},15^5,2,15,2^6$	503	39	1.473 2
	12	$1^7,14,1,15^5,29^{12},14^7,8,1^6$	557	41	1.472 2		12	$1^2,2^5,1,13^6,28^{12},15^5,2,15,2^6$	531	40	1.468 9
	13	$1^7,14,1,15^5,29^{13},14^7,8,1^6$	586	42	1.469 3		13	$1^2,2^5,1,13^6,28^{13},15^5,2,15,2^6$	559	41	1.466 9
	14	$1^7,14,1,15^5,29^{14},14^7,8,1^6$	615	43	1.468 3		14	$1^2,2^5,1,13^6,28^{14},15^5,2,15,2^6$	587	42	1.466 8
5	15	$1^7,14,1,15^5,29^{15},14^7,8,1^6$	644	44	1.468 9	5	15	$1^2,2^5,1,13^6,28^{15},15^5,2,15,2^6$	615	43	1.468 3
	16	$1^7,14,1,15^5,29^{16},14^7,8,1^6$	673	45	1.471 0		16	$1^2,2^5,1,13^6,28^{16},15^5,2,15,2^6$	643	44	1.471 2
	17	$1^7,14,1,15^5,29^{17},14^7,8,1^6$	702	46	1.474 4		17	$1^2,2^5,1,13^6,28^{17},15^5,2,15,2^6$	671	45	1.475 4
	18	$1^7,14,1,15^5,29^{18},14^7,8,1^6$	731	47	1.478 8		18	$1^2,2^5,1,13^6,28^{18},15^5,2,15,2^6$	699	46	1.480 6
	19	$1^7,14,1,15^5,29^{19},14^7,8,1^6$	760	48	1.484 2		19	$1^2,2^5,1,13^6,28^{19},15^5,2,15,2^6$	727	47	1.486 9
	20	$1^7,14,1,15^5,29^{20},14^7,8,1^6$	789	49	1.490 5		20	$1^2,2^5,1,13^6,28^{20},15^5,2,15,2^6$	755	48	1.494 0
	21	$1^7,14,1,15^5,29^{21},14^7,8,1^6$	818	50	1.497 6		10	$1^2,2^6,1,15^7,32^{10},17^6,2,17,2^7$	575	42	1.497 4
	11	$1^8,16,1,17^6,33^{11},16^8,9,1^7$	634	44	1.492 1		11	$1^2,2^6,1,15^7,32^{11},17^6,2,17,2^7$	607	43	1.487 6
	12	$1^8,16,1,17^6,33^{12},16^8,9,1^7$	667	45	1.484 3		12	$1^2,2^6,1,15^7,32^{12},17^6,2,17,2^7$	639	44	1.480 4
	13	$1^8,16,1,17^6,33^{13},16^8,9,1^7$	700	46	1.478 6		13	$1^2,2^6,1,15^7,32^{13},17^6,2,17,2^7$	671	45	1.475 4
	14	$1^8,16,1,17^6,33^{14},16^8,9,1^7$	733	47	1.474 8		14	$1^2,2^6,1,15^7,32^{14},17^6,2,17,2^7$	703	46	1.472 3
	15	$1^8,16,1,17^6,33^{15},16^8,9,1^7$	766	48	1.472 6		15	$1^2,2^6,1,15^7,32^{15},17^6,2,17,2^7$	735	47	1.470 7
	16	$1^8,16,1,17^6,33^{16},16^8,9,1^7$	799	49	1.471 8		16	$1^2,2^6,1,15^7,32^{16},17^6,2,17,2^7$	767	48	1.470 7
6	17	$1^8,16,1,17^6,33^{17},16^8,9,1^7$	832	50	1.472 4	6	17	$1^2,2^6,1,15^7,32^{17},17^6,2,17,2^7$	799	49	1.471 8
	18	$1^8,16,1,17^6,33^{18},16^8,9,1^7$	865	51	1.474 0		18	$1^2,2^6,1,15^7,32^{18},17^6,2,17,2^7$	831	50	1.474 1
	19	$1^8,16,1,17^6,33^{19},16^8,9,1^7$	898	52	1.476 6		19	$1^2,2^6,1,15^7,32^{19},17^6,2,17,2^7$	863	51	1.477 4
	20	$1^8,16,1,17^6,33^{20},16^8,9,1^7$	931	53	1.480 1		20	$1^2,2^6,1,15^7,32^{20},17^6,2,17,2^7$	895	52	1.481 6
	21	$1^8,16,1,17^6,33^{21},16^8,9,1^7$	964	54	1.484 4		21	$1^2,2^6,1,15^7,32^{21},17^6,2,17,2^7$	927	53	1.486 5
	22	$1^8,16,1,17^6,33^{22},16^8,9,1^7$	997	55	1.489 5		22	$1^2,2^6,1,15^7,32^{22},17^6,2,17,2^7$	959	54	1.492 2
	23	$1^8,16,1,17^6,33^{23},16^8,9,1^7$	1 030	56	1.495 1		23	$1^2,2^6,1,15^7,32^{23},17^6,2,17,2^7$	991	55	1.498 5
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

244的线性阵列，逐一比对它们是否存在于文献[20–21]的MRLA数据库中，或检查与其具有相同最大连续基线长度的MRLA是否具有相同的阵元数量;(2)对于筛选出的最大连续基线长度超过244的线性阵列，通过查阅现有文献，比较具有相同最大连续基线长度的线性阵列的阵元数量是否一致;(3)广泛搜集现有文献中冗余度超过1.5的线性阵列案例，验证它们不符合最小冗余线性阵列的定义.

第一，按照定理6中公式筛选出来的冗余度不大于1.5且最大连续基线长度不大于244的线性阵列在文献[21]MRLA数据库中分布情况见表3(为了节省文章篇幅，在表2中只示范性地给出了$t=5,6$时，满足冗余度不大于1.5的线性阵列).

表3中线性阵列配置在文献[21]数据库中的分布已经充分说明，本文筛选出来的线性阵列，当最大连续基线长度不大于241时，有27个线性阵列与文献[20–21]计算出来的MRLA的数据完全一致;另外，还有7个线性阵列的阵元数与文献[9]中同等最大连续基线长度的线性阵列阵元数相同，即冗余度相等.假如文献[21]数据库中包含最大连续基线长度更长的MRLA，则必然涵盖按照定理6公式筛选的更多线性阵列的配置.

表3 由定理6中公式筛选出来的余线性阵列配置在文献[20-21]中分布情况

Table 3 Distribution of redundant linear array configurations selected by the formula in Theorem 6 in references [20-21]

t,s的取值		最小线性阵列的配置	基线长	阵元数	冗余度	对应阵列所在文献
t	s	$1^{t+2},2t+4,1,(2t+5)^t,(4t+9)^s,\ (2t+4)^{t+2},t+3,1^{t+1}$	L	n	R	
1	3	$1^3,6,1,7,13^3,6^3,4,1^2$	80	16	1.500 0	均在文献[21]数据库中出现
	4	$1^3,6,1,7,13^4,6^3,4,1^2$	93	17	1.462 4	
	5	$1^3,6,1,7,13^5,6^3,4,1^2$	106	18	1.443 4	
	6	$1^3,6,1,7,13^6,6^3,4,1^2$	119	19	1.437 0	
	7	$1^3,6,1,7,13^7,6^3,4,1^2$	132	20	1.439 4	
	8	$1^3,6,1,7,13^8,6^3,4,1^2$	145	21	1.448 3	
	9	$1^3,6,1,7,13^9,6^3,4,1^2$	158	22	1.462 0	
	10	$1^3,6,1,7,13^{10},6^3,4,1^2$	171	23	1.479 5	
	11	$1^3,6,1,7,13^{11},6^3,4,1^2$	184	24	1.500 0	
2	5	$1^4,8,1,9^2,17^5,8^4,5,1^3$	156	22	1.480 8	与文献[21]中同长阵列同阵元数
	6	$1^4,8,1,9^2,17^6,8^4,5,1^3$	173	23	1.462 4	
	7	$1^4,8,1,9^2,17^7,8^4,5,1^3$	190	24	1.452 6	
	8	$1^4,8,1,9^2,17^8,8^4,5,1^3$	207	25	1.449 3	
	9	$1^4,8,1,9^2,17^9,8^4,5,1^3$	224	26	1.450 9	
	10	$1^4,8,1,9^2,17^{10},8^4,5,1^3$	241	27	1.456 4	
3	6	$1^5,10,1,11^3,21^6,10^5,6,1^4$	235	27	1.493 6	
t,s的取值		最小线性阵列的配置	基线长	阵元数	冗余度	对应阵列所在文献
t	s	$1^2,2^t,1,(2t+3)^{t+1},4t+8)^s,(2t+5)^t,2,2t+5,2^{t+1}$	L	n	R	
1	3	$1^2,2,1,5^2,12^3,7,2,7,2^2$	71	15	1.478 8	均在文献[21]数据库中出现
	4	$1^2,2,1,5^2,12^4,7,2,7,2^2$	83	16	1.445 8	
	5	$1^2,2,1,5^2,12^5,7,2,7,2^2$	95	17	1.431 6	
	6	$1^2,2,1,5^2,12^6,7,2,7,2^2$	107	18	1.429 9	
	7	$1^2,2,1,5^2,12^7,7,2,7,2^2$	119	19	1.437 0	
	8	$1^2,2,1,5^2,12^8,7,2,7,2^2$	131	20	1.450 3	
	9	$1^2,2,1,5^2,12^9,7,2,7,2^2$	143	21	1.468 5	
	10	$1^2,2,1,5^2,12^{10},7,2,7,2^2$	155	22	1.490 3	
2	4	$1^2,2^2,1,7^3,16^4,9^2,2,9,2^3$	127	20	1.496 1	与文献[21]中同长阵列同阵元数
	5	$1^2,2^2,1,7^3,16^5,9^2,2,9,2^3$	143	21	1.468 5	
	6	$1^2,2^2,1,7^3,16^6,9^2,2,9,2^3$	159	22	1.452 8	
	7	$1^2,2^2,1,7^3,16^7,9^2,2,9,2^3$	175	23	1.445 7	
	8	$1^2,2^2,1,7^3,16^8,9^2,2,9,2^3$	191	24	1.445 0	
	9	$1^2,2^2,1,7^3,16^9,9^2,2,9,2^3$	207	25	1.449 3	
	10	$1^2,2^2,1,7^3,16^{10},9^2,2,9,2^3$	223	26	1.457 4	
	11	$1^2,2^2,1,7^3,16^{11},9^2,2,9,2^3$	239	27	1.468 6	
3	6	$1^2,2^3,1,9^4,20^6,11^3,2,11,2^4$	219	26	1.484 0	与文献[21]中同长阵列同阵元数
	7	$1^2,2^3,1,9^4,20^7,11^3,2,11,2^4$	239	27	1.468 6	

第二,按照定理6中公式筛选出来的最大连续基线长度大于244线性阵列的配置虽然没有直接出现在文献[9]中,但总共有15个线性阵列的阵元数与文献[9]中同等最大连续基线长度的线性阵列的阵元数相同,即冗余度相等.这些与文献[9]中最大连续基线长度和阵元数相等的线性阵列分布情况见表4.

第三,文献[9,13]中一部分冗余度大于1.5线性阵列,给出了相同最大连续基线长度的阵元数更少的

表 4 由定理 6 中公式筛选出来的与文献[9]中同等最大连续基线长度且同等阵元数的线性阵列分布情况

Table 4 Distribution of linear arrays with the same maximum continuous baseline length and the same number of array elements as those in reference [9], selected by the formula in Theorem 6

t,s的取值		最小线性阵列的配置	基线长	阵元数	冗余度	对应阵列所在文献
t	s	$1^{t+2},2t+4,1,(2t+5)^t,(4t+9)^s,(2t+4)^{t+2},t+3,1^{t+1}$	L	n	R	
2	11	$1^4,8,1,9^2,17^{11},8^4,5,1^3$	258	28	1.465 1	与文献[9]中同基线长的阵列阵元数相同
3	8	$1^5,10,1,11^3,21^8,10^5,6,1^4$	277	29	1.465 7	与文献[9]中同基线长的阵列阵元数相同
	12	$1^5,10,1,11^3,21^{12},10^5,6,1^4$	361	33	1.462 6	
	13	$1^5,10,1,11^3,21^{13},10^5,6,1^4$	382	34	1.468 6	
4	9	$1^6,12,1,13^4,25^9,12^6,7,1^5$	380	34	1.476 3	与文献[9]中同基线长的阵列阵元数相同
	12	$1^6,12,1,13^4,25^{12},12^6,7,1^5$	455	37	1.463 7	
t,s的取值		线性阵列的配置	基线长	阵元数	冗余度	对应阵列所在文献
t	s	$1^2,2^t,1,(2t+3)^{t+1},(4t+8)^s,(2t+5)^t,2,2t+5,2^{t+1}$	L	n	R	
3	8	$1^2,2^3,1,9^4,20^8,11^3,2,11,2^4$	259	28	1.459 5	与文献[9]中同基线长的阵列阵元数相同
	10	$1^2,2^3,1,9^4,20^{10},11^3,2,11,2^4$	299	30	1.454 8	
	12	$1^2,2^3,1,9^4,20^{12},11^3,2,11,2^4$	339	32	1.463 1	
	13	$1^2,2^3,1,9^4,20^{13},11^3,2,11,2^4$	359	33	1.470 8	
	14	$1^2,2^3,1,9^4,20^{14},11^3,2,11,2^4$	379	34	1.480 2	
4	9	$1^2,2^4,1,11^5,24^9,13^4,2,13,2^5$	359	33	1.470 8	与文献[9]中同基线长的阵列阵元数相同
	10	$1^2,2^4,1,11^5,24^{10},13^4,2,13,2^5$	383	34	1.464 8	
	12	$1^2,2^4,1,11^5,24^{12},13^4,2,13,2^5$	431	36	1.461 7	
	13	$1^2,2^4,1,11^5,24^{13},13^4,2,13,2^5$	455	37	1.463 7	

线性阵列，如表5所示．这一点更加增强了冗余度不大于1.5的线性阵列都是MRLA的可信度．

5　结论与展望

本文通过深入的理论剖析与实证研究，在线性阵列与最小冗余线性阵列(MRLA)的研究领域内得出了以下结论:(1)理论体系的构建:本文明确界定了线性阵列与最小冗余线性阵列的数学概念，并通过严密

表5 文献[9,13]中部分非最小冗余线性阵列

Table 5 Partial non-minimal redundant linear arrays from references [9,13]

文献[9]中的部分冗余度大于1.5线性阵列配置			笔者给出的阵元数更小的线性阵列配置		
阵元数	基线长度	阵列配置	阵元数	基线长	阵列配置
32	327	$1^3,2,3,8^3,17^{15},9^2,1,9^2,1^3$	31	327	$1^5,6,11^5,23^8,12^6,1^5$
33	346	$1,2,1,5,3,5,8^2,18^{15},10^2,2,5,4^2,2,4,2$	32	346	$1^4,5,9^4,19^{13},10^5,1^4$
34	361	$1^3,2,3,8^3,17^{17},9^2,1,9^2,1^3$	33	361	$1^5,10,1,11^3,21^{12},10^5,6,1^4$
35	382	$1^2,12,2,6^2,8,6,19^{16},11,2,5,6,3,2^2,3,1^2$	34	382	$1^5,10,1,11^3,21^{13},10^5,6,1^4$
37	420	$1^2,12,2,6^2,8,6,19^{18},11,2,5,6,3,2^2,3,1^2$	36	420	$1,2^5,11^4,20^{16},9^4,1,2^4$
文献[13]中的部分冗余度大于1.5阵列配置			笔者给出的阵元数更小的阵列配置		
阵元数	基线长度	阵列配置	阵元数	基线长	阵列配置
29	270	$1^2,3,2^2,20,2,1,19^{10},16,1,4,3,9,1,3,8,2,1$	28	270	$1^4,5,9^4,19^9,10^5,1^4$
33	344	$1^2,12,2,6^2,8,6,19^{14},11,2,5,6,3,2^2,3,1^2$ $1^3,2,3,8^3,17^{16},9^2,1,9^2,1^3$	32	344	$1^5,10,1,11^4,21^{11},10^4,9,1^4$
36	395	$1^3,2,3,8^3,17^{19},9^2,1,9^2,1^3$	34	395	$1^5,6,11^6,23^{11},12^5,1^5$

的逻辑推导,揭示了MRLA与元素数量最少化的受限差集、最省刻度尺的刻度值以及极小优美图的优美标号之间存在的深刻而等价的数学关系.(2)成对存在性与冗余特性的阐明:借助数学证明,本文证实了线性阵列与MRLA均具备成对存在的特性,并深入分析了线性阵列的冗余度特征,指出其冗余度至少为1,且在阵元数达到或超过5时,冗余度必然大于1.(3)数据分析与分类准则的提出:基于德国不伦瑞克技术大学团队的研究成果,本文对最大连续基线长度在1至244范围内的MRLA配置数据进行了详尽分析,并据此提出了分类标准:冗余度不超过1.5的线性阵列可视为MRLA,而冗余度不超过14/9的则归为低冗余线性阵列(LRLA).(4)新解析公式的发现与MRLA的筛选:发现了两类全新的线性阵列解析公式,并据此筛选出了两大类无穷多的MRLA.此外,本文提出的方法允许用户根据实际需求设定筛选线性阵列冗余度的上限,为实际应用提供了极大的灵活性,同时避免了大量计算机资源的依赖.尤为重要的是,本文表明,通过解析公式表示线性阵列并非偶然现象,如定理5中的四个公式均为线性阵列的解析式.例如,将其中的两个公式$f(t)$和$h(t)$分别改造为双变量参数公式:

$$f(t):1^t,t+1,(2t+1)^t,(4t+3)^s,(2t+2)^{t+1},1^t;\ h(t):1,2^{t+1},(2t+3)^t,(4t+4)^s,(2t+1)^t,1,2^t.$$

改造之后的双变量参数公式同样能在冗余度不大于1.5的条件下筛选出两类无穷多的线性阵列.此类例子众多,例如,下面的4个双变量线性阵列公式:

(1) $1^t,t+2,(2t+2)^t,(4t+5)^s,(2t+3)^{t+1},1^{t+1},t,2$; (2) $1,2^{t+1},(2t+3)^t,(4t+4)^s,(2t+1)^t,1,2^t$;

(3) $1^{t+1},(2t+3)^{t+2},(4t+5)^s,(2t+2)^{t+1},t+2,1^t$; (4) $1^t,(2t+2)^{t+1},(4t+3)^s,(2t+1)^t,t+1,1^t,t$.

这足以说明本文方法具有普遍适用性.

综上所述,本文在线性阵列与MRLA研究领域取得了显著成果,不仅构建了系统的理论体系,揭示了关键性质,还提出了新颖的解析公式与分类标准,为阵列信号处理领域的发展做出了积极贡献.虽然本文方法能快速得到大量MRLA,但实际应用中仍存挑战:一是从众多MRLA中选择最适合的阵列复杂且耗时,需细致比较各阵列性能;二是不同应用对MRLA性能要求各异,可能未找到完全匹配的阵列;三是缺乏实验性能数据,需大量实验验证,增加了选择不确定性和成本.未来研究可在此基础上,进一步探索更高效的MRLA设计方法.尽管本文推断冗余度不大于1.5的线性阵列均属于MRLA,但这一结论尚需严格的理论证明.期待未来的研究能够深入挖掘其背后的理论机制,进一步验证并拓展该发现.

参 考 文 献

[1] Leech J. On the representation of $1,2,\cdots,n$ by differences[J]. Journal of the London Mathematical Society, 1956, 31(2): 160–169.

[2] Moffet A. Minimum–redundancy linear arrays[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1968, 16(2): 172–175.

[3] 彭珍妮, 贲 德, 张 弓. MIMO雷达的最小冗余线性阵列配置与优化[J]. 现代雷达, 2014, 36(6): 22–25.

[4] Ma H, Mao X P, Wang X H, et al. A new array extension configuration method based on nesting and minimum redundancy[J]. IET Radar, Sonar & Navigation, 2023, 17(5): 748–758.

[5] Ishiguro M. Minimum redundancy linear arrays for a large number of antennas[J]. Radio Science, 1980, 15(6): 1 163–1 170.

[6] Qi C Y, Zhang G, Yuan J W. Gridless DOA estimation for minimum–redundancy linear array in nonuniform noise[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2020, 2020(1): 1580391.

[7] Gelli G, Izzo L. Minimum–redundancy linear arrays for cyclostationarity–based source location[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1997, 45(10): 2 605–2 608.

[8] 董 健. 综合孔径微波辐射计天线阵排列优化研究[D]. 湖北 武汉: 华中科技大学, 2010: 1–45.

[9] Jang C H, Hu F, He F, et al. Low–redundancy large linear arrays synthesis for aperture synthesis radiometers using particle swarm optimization[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2016, 64(6): 2179–2188.

[10] 赵永涛, 栾英宏, 姚崇斌, 等. 基于粒子群算法的大型低冗余度线阵综合[J]. 空间电子技术, 2019, 16(3): 102–108, 114.

[11] Zheng T, Hu F, Wu L, et al. Synthesis of large alias-free field-of-view linear arrays for synthetic aperture interferometric radiometers[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2020, 68(12): 7 916-7 926.
[12] Dong J, Li Q X, Jin R, et al. A method for seeking low-redundancy large linear arrays in aperture synthesis microwave radiometers[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2010, 58(6): 1 913-1 921.
[13] Camps A, Cardama A, Infantes D. Synthesis of large low-redundancy linear arrays[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2001, 49(12): 1 881-1 883.
[14] 董 健, 李青侠, 靳 榕, 等. 一种获取大阵元数低冗余度线阵排列的方法[J]. 电子学报, 2009, 37(10): 2 348-2 352.
[15] Zhu D, Hu F, Wu L, et al. Low-redundancy linear arrays in mirrored interferometric aperture synthesis[J]. Optics Letters, 2016, 41(2): 368-371.
[16] Ruf C S. Numerical annealing of low-redundancy linear arrays[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1993, 41(1): 85-90.
[17] 卢 军, 林士杰, 张祖荫, 等. 获得最小剩余度线性阵列的排列方法[J]. 华中理工大学学报, 1995, 23(5): 64-69.
[18] Wichmann B. A note on restricted difference bases[J]. Journal of the London Mathematical Society, 1963, 38(1): 465-466.
[19] Linebarger D A, Sudborough I H, Tollis I G. Difference bases and sparse sensor arrays[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1993, 39(2): 716-721.
[20] Schwartau F, Schröder Y, Wolf L, et al. Large minimum redundancy linear arrays: systematic search of perfect and optimal rulers exploiting parallel processing[J]. IEEE Open Journal of Antennas and Propagation, 2020, 2: 79-85.
[21] Schwartau F, Schröder Y, Lars W, et al. MRLA search results and source code [DB/OL]. (2022-05-18) [2024-04-18]. http://dx.doi.org/10.21227/cd4b-nb07.
[22] 唐保祥, 任 韩. 最省刻度尺设计的组合差集递推算法[J]. 浙江大学学报(理学版), 2024, 51(2): 178-185.

A Method for Rapid Acquisition of Minimum Redundancy Linear Arrays

Tang Baoxiang[1], Ren Han[2]

(1. *School of Mathematics and Statistics, Tianshui Normal University, Tianshui* 741001, *China*;
2. *School of Mathematics Sciences, East China Normal University, Shanghai* 200062, *China*)

Abstract: This study addresses the challenge of acquiring Minimum Redundancy Linear Arrays (MRLAs) with large array elements in radar, microwave radiometers, and wireless communication systems. It reveals the mathematical equivalence relationships between MRLAs and constrained difference bases with the smallest number of elements, scale values of perfect sparse rulers, and graceful labelings of minimal graceful graphs. Based on these insights, the following four points are proven: (1) Linear arrays and MRLAs exist in pairs; (2) The redundancy of linear arrays is no less than 1; (3) The redundancy of linear arrays with more than four array elements is greater than 1; (4) If the number of array elements in an MRLA with a maximum continuous baseline length of L is n, then the number of array elements in an MRLA with a maximum continuous baseline length of $L+1$ is not greater than $n+1$. Based on these conclusions, combined with data analysis and examples of large-scale MRLAs from existing literature, the study proposes that linear arrays with a redundancy of no more than 1.5 are MRLAs. As the maximum continuous baseline length or the number of array elements increases infinitely, the redundancy of MRLAs approaches 1.5. Furthermore, the study discovers two novel analytical formulas for linear arrays, which can be used to rapidly screen out two infinite configuration patterns of MRLAs. This method allows for flexible adjustment of the redundancy screening threshold according to practical needs, providing strong support for the application of MRLAs.

Keywords: linear array; minimum redundancy linear array; redundancy; constrained difference set; perfect sparse ruler; minimal graceful graph

[责任编辑：陈玮]