文章编号：0465−7942(2026)02−0103−09

外平面图的邻点全和可区别全染色

王文杰， 李志军， 文 飞
(兰州交通大学 应用数学研究所，甘肃 兰州 730070)

摘要：图G的邻点全和可区别全染色是一个满足任意两个相邻顶点全和不同的正常全染色，其中顶点的全和是该点及其关联元素所染的颜色之和．将所用的最少颜色数k称为G的邻点全和可区别全色数，记作$ftndi_{\Sigma}(G)$．运用组合零点定理及结构分析法考虑了外平面图G的邻点全和可区别全染色，并得到当$\Delta(G)\geqslant 7$时，有$ftndi_{\Sigma}(G)\leqslant\Delta(G)+3$.

关键词：外平面图；正常全染色；邻点全和可区别全染色；组合零点定理
中图分类号：O157.5 **文献标识码**：A

0 引 言

文中所考虑的图均为无向简单连通图．对于任意图G，记它的顶点集、边集、最大度以及最小度分别为$V(G)$、$E(G)$、$\Delta(G)$和$\delta(G)$．用$N_G(v)$(或$N(v)$)表示顶点v在G中所有邻点构成的集合．对任意$v\in V(G)$，用$d_G(v)$(或$d(v)$)表示点v的度，若$d_G(u)=t(d_G(u)\geqslant t,\ d_G(u)\leqslant t)$，则称$u$为$t$−点($t^+$−点，$t^-$−点)．文中未定义的术语和符号见文献[1].

2004年，张忠辅等在文献[2]中提出了图的邻点可区别全染色的概念，即在图G一个正常全染色的基础上，满足任意两个相邻点的色集合不同，其中任意一个点的色集合是指该点所染的颜色与该点关联的边上所染颜色所构成的集合．将图G满足邻点可区别全染色的最少颜色数称为邻点可区别全色数，简记为$\chi_{at}(G)$．张忠辅等基于一些特殊图类的邻点可区别全色数提出如下猜想．

猜想1[2] 对于阶数不小于2的简单连通图G，有$\chi_{at}(G)\leqslant\Delta(G)+3$.

截至目前，国内外学者针对猜想1的研究已取得了一些重要结果．2014年，Wang等[3]证明了对于平面图G，若$\Delta(G)\geqslant 14$，则$\Delta(G)+1\leqslant\chi_{at}(G)\leqslant\Delta(G)+2$，且$\chi_{at}(G)=\Delta(G)+2$当且仅当$G$包含两个相邻的最大度点．2017年，Sun等[4]证明了对于$\Delta(G)\geqslant 8$且不含相邻4−圈的平面图G，有$\chi_{at}(G)\leqslant\Delta(G)+3$．2019年，Hu等[5]证明了若平面图$G$的$\Delta(G)\geqslant 9$，则$\chi_{at}(G)\leqslant\max\{\Delta(G)+2,12\}$．2020年，Chang等[6]又证明了对于任一平面图G，若$\Delta(G)\geqslant 8$，则$\chi_{at}(G)\leqslant\Delta(G)+3$.

2004年，Karoński等在文献[7]中首次提出图的邻和可区别边染色．2015年，Pilśniak和Woźniak[8]提出了图的邻和可区别全染色的概念，即在图G的一个正常全染色的基础上，满足任意两个相邻点的色集合中所有元素之和不同．将图G满足邻和可区别全染色的最少颜色数称为邻和可区别全色数，简记为$\chi''_{\Sigma}(G)$．显然，任意一个图的邻和可区别全染色一定是邻点可区别全染色，而邻点可区别全染色未必是邻和可区别全染色，因此$\chi''_{\Sigma}(G)\geqslant\chi_{at}(G)$．同时，他们完全刻画了一些特殊图类的邻和可区别全色数，如路、圈、树、完全图、完全二部图．基于上述结果，他们给出以下猜想．

猜想2[8] 对于阶数至少为2的图G，有$\chi''_{\Sigma}(G)\leqslant\Delta(G)+3$.

2016年，Qu等[9]证明了对于任一平面图G，有$\chi''_{\Sigma}(G)\leqslant\max\{\Delta(G)+3,14\}$．2020年，Song等[10]研究了对于IC−平面图G，有$\chi''_{\Sigma}(G)\leqslant\max\{\Delta(G)+2,16\}$．2024年，Du等[11]证明了不存在4−圈与6−圈相

收稿日期：2025−03−25
基金项目：国家自然科学基金(12261055)；甘肃省自然科学基金重点项目(24JRRA222)
作者简介：王文杰(1979−)，男，山东曹县人，副教授，研究方向：图论与组合优化．
通讯作者：文 飞(1984−)，男，甘肃天水人，教授，研究方向：图染色，图谱理论．E−mail: wenfei@lzjtu.edu.cn

交的平面图,有$\chi''_{\Sigma}(G) \leqslant \max\{10, \Delta(G)+3\}$.

2017年, Flandrin等[12]将任意一点的关联边和其邻点所染颜色相加,定义了图的邻点被扩展和可区别全染色,同时又提到在邻点被扩展和可区别全染色的基础上加上点本身的颜色,即后来所称谓的邻点全和可区别全染色,具体定义如下.

定义1[12] 令G是一个$|V(G)| \geqslant 3$的简单连通图,$f: V(G) \cup E(G) \to \{1,2,\cdots,k\}$是图$G$的一个正常$k$–全染色.若满足

(1) 对任意相邻顶点u,v,有$f(u) \neq f(v)$;

(2) 对任意顶点v及其关联边e,有$f(v) \neq f(e)$;

(3) 对任意相邻边e,e',有$f(e) \neq f(e')$;

(4) 对任意相邻顶点u,v,有$\phi(u) \neq \phi(v)$.

其中

$$\phi(v) = f(v) + \sum_{v \in e} f(e) + \sum_{u \in N(v)} f(u),$$

且$N(v) = \{u \in V(G) \mid uv \in E(G)\}$.则称$f$是图$G$的一个邻点全和可区别$k-$全染色,简记为$G$的$k$–NFSDTC.将所用的最少颜色数$k$称为$G$的邻点全和可区别全色数,记作$ftndi_{\Sigma}(G)$.

显然, $ftndi_{\Sigma}(G) = \min\{k \mid G$具有一个$k-$NFSDTC$\}$

值得注意的是,如果图G包含孤立边,那么G不存在邻点全和可区别全染色.若G不含孤立边,则G被称为正常图.本文所讨论的图均是正常图.文献[13]首先研究了图的邻点全和可区别全染色且提出下面的猜想.

猜想3[13] 设G是一个正常图,则$ftndi_{\Sigma}(G) \leqslant \Delta(G)+2$.

近年来,图的邻点全和可区别全染色引起了国内学者的广泛关注. 2023年,崔福祥等[13]完全刻画了路、圈、星、轮、扇、完全图、完全二部图以及树的邻点全和可区别全染色,之后又在文献[14]中给出了三类联图的邻点全和可区别全色数. 2024年,文献[15]又证明了单圈图的邻点全和可区别全染色.

一个平面图G如果可嵌入到Euclidean平面中,使得所有的顶点与无界面相关联,则称G为外平面图.显然地,所有的树和最大度至多为2的图是外平面图. Liu等[16]研究了最大度不小于5的外平面图的邻点可区别边染色. Chen等[17]研究了外平面图的邻点可区别I–全染色. Wang等[18]完全刻画了外平面图的邻点可区别全染色,并给出相应的邻点可区别全色数.

基于上述邻点全和可区别全染色以及外平面图染色的研究,本文考虑了外平面图的邻点全和可区别全染色,得到了外平面图的最大度大于等于7时,其邻点全和可区别全色数的一个上界.

1 主要引理

引理1[13] 设P_n为$n \geqslant 3$阶的路,有$ftndi_{\Sigma}(P_n) = 3$.

引理2[13] 设C_n为$n \geqslant 3$阶的圈,有$ftndi_{\Sigma}(C_n) = \begin{cases} 4, & n \geqslant 4 \text{且} n \neq 0 (\mathrm{mod}\, 3), \\ 3, & \text{其他}. \end{cases}$

根据引理1和引理2显然可得如下推论.

推论1 若$G(\neq K_2)$是$\Delta(G) \leqslant 2$的连通图,则$ftndi_{\Sigma}(G) \leqslant 4$.

引理3[13] 设S_n是一个阶数为$n+1 (n \geqslant 3)$的星,则$ftndi_{\Sigma}(S_n) = n+1$.

引理4[15] 设G是$n \geqslant 3$阶的连通图, v是G的一个悬挂点, v的邻点为w,且w仅有一个非悬挂邻点,记作u.若$G' = G - v$且G'有一个$(\Delta(G')+1)$–NFSDTC f',则G存在一个由f'所延拓的$(\Delta(G)+1)-$正常全染色f;进一步, 若f满足$f(v)+f(wv)$至少有两个不同的取值时,则f为G的一个$(\Delta(G)+1)$–NFSDTC.

引理5[15] 对一个正常图G,若x是G的一个悬挂点, y是x的邻点,则$\phi(x) \neq \phi(y)$.

引理6[18]　每一个$\Delta(G)=3$外平面图G必含有下面的子构型之一:

(A1) 一个顶点v(非叶子)与至多一个不是叶子的顶点相邻;

(A2) 一条路$x_1x_2x_3x_4$,使得$d_G(x_1)=3$, x_2和x_3中每个是2–点,或者是与一个叶子相邻的3–点;

(A3) 一个3–面$[uxy]$,使得$d_G(x)=3$,且或者$d_G(u)=2$或$d_G(u)=3$,且u只与一个叶子相邻.

引理7[18]　每一个连通且$\Delta(G)\geqslant 3$的外平面图G必含有下面的子构型之一:

(C1) 一个3^-–点v与一个叶子相邻;

(C2) 一条长为$n-1$的路或圈$v_1v_2\cdots v_{n-1}v_n$($v_1=v_n$时为圈), $n\geqslant 4$,满足$d(v_1)\geqslant 3$, $d(v_n)\geqslant 3$且对所有的$i=2,3,\cdots,n-1$,有$d(v_i)=2$;

(C3) 一个4^+–点v与一个叶子及其它的度$\leqslant 2$的$k-3$个顶点相邻;

(C4) 一个3–面$[uv_1v_2]$满足$d(u)=2$, $d(v_1)=3$, ;

(C5) 两个3–面$[xu_1v_1]$和$[xu_2v_2]$满足$d(x)=4$,且$d(u_1)=d(u_2)=2$.

引理8[19]　(组合零点定理)设F为任一域, $P=P(x_1,x_2,\cdots x_n)$为$F[x_1,x_2,\cdots x_n]$上的多项式.设$\deg(P)=\sum_{i=1}^{n}k_i$,其中$k_i$为非负整数,并且$P$中$x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$的系数非零.若$S_1,S_2,\cdots S_n\subseteq F$且$|S_i|>k_i$,$1\leqslant i\leqslant n$,则存在$s_1\in S_1,s_2\in S_2,\cdots,s_n\in S_n$使得$P(s_1,s_2,\cdots,s_n)\neq 0$.

引理9[20]　设B_1,B_2为整数集合,其中$|B_1|=m\geqslant 2$且$|B_2|=n\geqslant 2$.定义集合

$$B_3=\{x+y\,|\,x\in B_1,y\in B_2,x\neq y\},$$

则有$|B_3|\geqslant m+n-3$.此外,若$B_1\neq B_2$,则$|B_3|\geqslant m+n-2$.

2　主要结论

定理1　设G是$\Delta(G)\leqslant 3$的正常外平面图,则$\mathit{tndi}_{\Sigma}(G)\leqslant 7$.

证明　对$|T(G)|=|V(G)|+|E(G)|$进行数学归纳.若$|T(G)|\leqslant 5$,由G是$\Delta(G)\leqslant 3$的正常外平面图, G只能属于K_1或K_3,则定理显然成立.设G是$|T(G)|\geqslant 6$的正常外平面图.由归纳假设,对于任意外平面图H,若满足$\Delta(H)\leqslant 3$, $|T(H)|<|T(G)|$的任意外平面图H存在7–NFSDTC f'.

根据推论1,任意$\Delta(G)\leqslant 2$的连通图G存在一个4–NFSDTC.因此,可假设G是$\Delta(G)=3$的连通图.由引理6可知, G至少包含(A1)–(A3)子构型之一,分以下3种情形讨论.记$C=\{1,2,\cdots,7\}$表示一个7种颜色的集合.定义G的染色f, $f(v)=f'(v)$, $v\in V(H)$; $f(e)=f'(e)$, $e\in E(H)$.令$\phi(v),\phi'(v)$分别表示在染色f,f'中点v及其关联边、相邻点的颜色之和.

情形1　G存在一个顶点v与至多一个不是叶子的顶点相邻.

设$v_1,v_2,\cdots,v_n$是v的所有邻点,且$d_G(v_1)=d_G(v_2)=\cdots=d_G(v_{n-1})=1$, $d_G(v_n)\geqslant 1$.显然$2\leqslant n\leqslant 3$.令$H=G-v_1$,由归纳假设知, H存在一个7–NFSDTC f'.下面根据$d_G(v)$的值分以下两种情形讨论.

情形1.1　$d_G(v)=2$.

此时,对边vv_1及点v_1进行染色,令

$$f(vv_1)\in C\backslash\{f'(v),f'(vv_2)\},f(v_1)\in C\backslash\{f(vv_1),f'(v)\}.$$

由于f是G的一个正常全染色, $f(v_1)\neq f(vv_1),f(v_1)\neq f(v)$,所以$f(v_1)$至少有两个不同的值可取,故$f(vv_1)+f(v_1)$至少有两个不同的取值,由引理4,$\phi(v)\neq\phi(v_2)$;又由引理5知, $\phi(v)\neq\phi(v_1)$.从而得到了G的一个7–NFSDTC f.

情形1.2　$d_G(v)=3$.

当$d_G(v_3)=1$时, G是一个阶数为4的星,由引理3知, G有一个4–NFSDTC f;当$d_G(v_3)\geqslant 2$时,

$$f(vv_1)\in C\backslash\{f'(v),f'(vv_2),f'(vv_3)\},f(v_1)\in C\backslash\{f'(v),f(vv_1)\}.$$

此时$f(vv_1)+f(v_1)$至少有两个不同的取值,由引理4知, $\phi(v)\neq\phi(v_3)$;又由引理5知$\phi(v)\neq\phi(v_1)$, $\phi(v)\neq\phi(v_2)$.因此, f是G的一个7–NFSDTC.

情形2. G存在一条路$x_1x_2x_3x_4$,使得$d_G(x_1)=3$, x_2和x_3中每个是2–点,或是与一个叶子相邻的3–点.

对$i\in\{2,3\}$,设x_i'是当x_i是3–点时相邻的叶子.如图1所示.

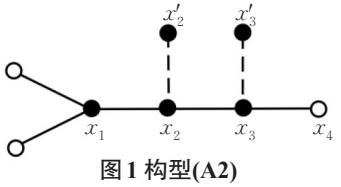


图1 构型(A2)

Fig.1 Configuration (A2)

根据x_2和x_3的度,分以下4种情况讨论.

情形2.1 $d_G(x_2)=d_G(x_3)=2$.

情形2.1.1 $d_G(x_4)=1$.

令$H=G-x_4$,由归纳假设知, H存在一个7–NFSDTC f'.若要将f'延拓为G的一个7–NFSDTC f,则只需对边x_3x_4及点x_4正常染色,令

$$f(x_3x_4)\in C\backslash\{f'(x_3),f'(x_2x_3)\},\ f(x_4)\in C\backslash\{f(x_3x_4),f'(x_3)\}.$$

显然, $f(x_3x_4)+f(x_4)$至少有两个不同的取值,由引理4知, $\phi(x_3)\neq\phi(x_2)$,又根据引理5知, $\phi(x_4)\neq\phi(x_3)$.因此, f是G的一个7–NFSDTC.

情形2.1.2 $d_G(x_4)=2$.

设x_4'是x_4不同于x_3的另一个邻点.令$H=G-x_3$,由归纳假设知, H存在7–NFSDTC f'.为了将f'的染色拓展为G的一个7–NFSDTC f,给点x_3以及边x_2x_3,x_3x_4分别重新分配变量y_1,y_2,y_3.令$|S(y_1)|$, $|S(y_2)|,|S(y_3)|$分别表示点x_3以及边x_2x_3,x_3x_4的可用色,由于f是正常全染色,显然有

$$|S(y_1)|\geqslant 5,\ |S(y_2)|\geqslant 5,\ |S(y_3)|\geqslant 5.$$

由染色条件可得多项式$Q_1(y_1,y_2,y_3)$:

$$\begin{aligned}&Q_1(y_1,y_2,y_3)\\&=\prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant 3}(y_i-y_j)(y_1+y_2+f(x_2)+f(x_1x_2)+f(x_1)-\phi(x_1))(y_3+f(x_4)+f(x_2)-\phi'(x_2))\\&\quad\times(y_2+f(x_2)+f(x_4)-\phi'(x_4))(y_1+y_3+f(x_4)+f(x_4x_4')+f(x_4')-\phi(x_4')).\end{aligned}$$

去掉$Q_1(y_1,y_2,y_3)$中的常数得:

$$\bar{Q}_1(y_1,y_2,y_3)=\prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant 3}(y_i-y_j)(y_1+y_2)y_3y_2(y_1+y_3).$$

易知$C_{Q_1}(y_1,y_2,y_3)=C_{\bar{Q}_1}(y_1,y_2,y_3)$,利用Matlab R2021b计算得$C_{\bar{Q}_1}(y_1^2y_2^3y_3^2)=1\neq 0$.由引理8知,图$G$存在一个由$f'$所延拓的7–邻点全和可区别全染色$f$.

情形2.1.3 $d_G(x_4)=3$.

设x_4',x_4''是x_4不同于x_3的邻点.令$H=G-x_3$,由归纳假设知, H存在一个7–NFSDTC f'.若将f'延拓成G的一个7–NFSDTC f,则给点x_3以及边x_2x_3,x_3x_4分别重新分配变量y_1,y_2,y_3.令$|S(y_1)|,|S(y_2)|,|S(y_3)|$分别表示点$x_3$以及边$x_2x_3,x_3x_4$的可用色,显然有

$$|S(y_1)|\geqslant 5,|S(y_2)|\geqslant 5,|S(y_3)|\geqslant 4.$$

由染色条件可得多项式$Q_2(y_1,y_2,y_3)$:

$$\begin{aligned}Q_2(y_1,y_2,y_3)=&\prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant 3}(y_i-y_j)(y_1+y_2+f(x_2)+f(x_1x_2)+f(x_1)-\phi(x_1))\\&\times(y_3+f(x_4)+f(x_2)-\phi'(x_2))(y_2+f(x_2)+f(x_4)-\phi'(x_4))\\&\times(y_1+y_3+f(x_4)+f(x_4x_4')+f(x_4')+f(x_4x_4'')+f(x_4'')-\phi(x_4'))\\&\times(y_1+y_3+f(x_4)+f(x_4x_4')+f(x_4')+f(x_4x_4'')+f(x_4'')-\phi(x_4'')).\end{aligned}$$

去掉$Q_2(y_1,y_2,y_3)$中的常数得:

$$\bar{Q}_2(y_1,y_2,y_3)=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant 3}(y_i-y_j)(y_1+y_2)y_3y_2(y_1+y_3)^2.$$

易知$C_{Q_2}(y_1,y_2,y_3)=C_{\bar{Q}_2}(y_1,y_2,y_3)$,利用Matlab R2021b计算得$C_{\bar{Q}_2}(y_1^3y_2^3y_3^2)=1\neq 0$.从而由引理8知,图$G$存在一个由$f'$所延拓的7–邻点全和可区别全染色$f$,显然,$H$的一个7–NFSDTC f'可拓展为G的一个7–NFSDTC f.

情形2.2 $d_G(x_2)=d_G(x_3)=3$.

设x_2',x_3'分别为x_2,x_3的叶子邻点.令H为G中捏合x_2'和x_3'所得之图,则H是$\Delta(H)\leqslant 3$,且$|T(H)|=|T(G)|-1$的外平面图,由归纳假设,H有一个4–NFSDTC f.拆分x_2'和x_3',可得G的一个4–NFSDTC f.

情形2.3 $d_G(x_2)=3$, $d_G(x_3)=2$.

令$H=G-x_2'$,由归纳假设知,H存在一个7–NFSDTC f'. 若要将f'延拓为的一个7–NFSDTC f,则需对边x_2x_2'及点x_2'正常染色,令

$$f(x_2x_2')\in C\backslash\{f'(x_2),f'(x_1x_2),f'(x_2x_3)\},f(x_2')\in C\backslash\{f(x_2x_2'),f'(x_2)\},$$

显然$f(x_2')$至少有3种可用色,故$f(x_2x_2')+f(x_2')$至少有3个不同的取值,由引理4知,$\phi(x_2)\neq\phi(x_1)$, $\phi(x_2)\neq\phi(x_3)$, 又根据引理5知,$\phi(x_2')\neq\phi(x_2)$.因此,f是G的一个7–NFSDTC.

情形 2.4 $d_G(x_2)=2$, $d_G(x_3)=3$.

令$H=G-x_3'$,类似情形2.3可证.

情形3 G存在一个3–面$[uxy]$,使得$d_G(x)=3$,且或者$d_G(u)=2$或$d_G(u)=2$,且u只与一个叶子相邻.

设x'为x不同于u,y的邻点.如图2所示.

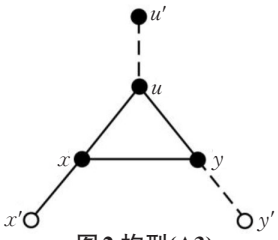


图2 构型(A3)
Fig.2 Configuration (A3)

下面根据u和y的度分以下3种情形讨论.

情形3.1 $d_G(y)=d_G(u)=2$.

令$H=G-u$,由归纳假设知,H存在7–NFSDTC f'. 为了将f'的染色拓展为G的一个7–NFSDTC f,给点u以及边xu,uy分别重新分配变量y_1,y_2,y_3.令$|S(y_1)|,|S(y_2)|,|S(y_3)|$,分别表示点$u$以及边$xu,uy$的可用色,由于$f$是正常全染色,显然有

$$|S(y_1)|\geqslant 5,|S(y_2)|\geqslant 4,|S(y_3)|\geqslant 5.$$

由染色条件可得多项式$Q_3(y_1,y_2,y_3)$:

$$\begin{aligned}Q_3(y_1,y_2,y_3)=&\prod_{1\leqslant i<j\leqslant 3}(y_i-y_j)(y_1+y_2+f(x)+f(xx')+f(x')+f(xy)+f(y)-\phi(x'))\\&\times(y_3+f(y)+f(x)-\phi'(x))(y_1+f(x)+f(y)-\phi'(y))\\&\times(y_1+f(xx')+f(x')-y_3).\end{aligned}$$

去掉$Q_3(y_1,y_2,y_3)$中的常数得

$$\bar{Q}_3(y_1,y_2,y_3)=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant 3}(y_i-y_j)(y_1+y_2)y_3y_1(y_1-y_3)$$

易知$C_{Q_3}(y_1,y_2,y_3)=C_{\bar{Q}_3}(y_1,y_2,y_3)$,利用Matlab R2021b计算得$C_{\bar{Q}_3}(y_1^3y_2^2y_3^2)=2\neq 0$.由引理8知,图$G$存在一个由$f'$所延拓的7–邻点全和可区别全染色$f$.

情形3.2 $d_G(u)=3$.

设u'为u的叶子邻点.令$H=G-u'$,由归纳假设知,H有一个7–NFSDTC f'. 若要将f'延拓为G的一个7–NFSDTC f,则需对边uu'及点u'正常染色,令$f(uu')\in C\backslash\{f'(u),f'(ux),f'(uy)\}$, $f(u')\in C\backslash\{f(uu'),f'(u)\}$.显然,$f(u')$至少有3种可用色,故$f(uu')+f(u')$至少有3个不同的取值,由引理4知,$\phi(u)\neq\phi(x)$, $\phi(u)\neq\phi(y)$,又根据引理5知,$\phi(u')\neq\phi(u)$.因此,f是G的一个7–NFSDTC.

情形3.3 $d_G(y)=3$, $d_G(u)=2$.

设y'是y不同于u, x的邻点.令$H=G-u$,由归纳假设知, H存在7–NFSDTC f'.

为了将f'的染色拓展为G的一个7–NFSDTC f,给点u以及边xu,uy分别重新分配变量y_1,y_2,y_3.令$|S(y_1)|,|S(y_2)|,|S(y_3)|$分别表示点$u$以及边$xu,uy$的可用色,由于$f$是正常全染色,显然有$|S(y_1)|\geqslant 5$, $|S(y_2)|\geqslant 4$, $|S(y_3)|\geqslant 4$.由染色条件可得多项式$Q_4(y_1,y_2,y_3)$:

$$\begin{aligned}&Q_4(y_1,y_2,y_3)\\&=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant 3}(y_i-y_j)(y_1+y_2+f(x)+f(xy)+f(y)+f(xx')+f(x')-\phi(x'))(y_3+f(y)+f(x)-\phi'(x))\\&\quad\times(y_2+f(x)+f(y)-\phi'(y))(y_3+f(yy')+f(y')-y_2-f(xx')-f(x'))\\&\quad\times(y_1+y_3+f(y)+f(xy)+f(x)+f(yy')+f(y')-\phi(y')).\end{aligned}$$

去掉$Q_4(y_1,y_2,y_3)$中的常数得

$$\bar{Q}_4(y_1,y_2,y_3)=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant 3}(y_i-y_j)(y_1+y_2)y_3y_2(y_3-y_2)(y_1+y_3).$$

易知$C_{Q_4}(y_1,y_2,y_3)=C_{\bar{Q}_4}(y_1,y_2,y_3)$,利用Matlab R2021b计算得$C_{\bar{Q}_4}(y_1^4y_2^2y_3^2)=2\neq 0$.由引理8知,图$G$存在一个由$f'$所延拓的7–邻点全和可区别全染色$f$.

综上所述, 定理得证.

定理2 设G是$\Delta(G)\geqslant 7$的外平面图,则$ftndi_{\Sigma}(G)\leqslant\Delta(G)+3$.

证明 对$|T(G)|$运用归纳法.设G是$\Delta(G)\geqslant 7$的外平面图,由归纳假设,对每个$\Delta(H)\leqslant\Delta(G)$, $|T(H)|<|T(G)|$的外平面图H,有

$$ftndi_{\Sigma}(H)\leqslant\Delta(H)+3\leqslant\Delta(G)+3.$$

假设G是连通的,由引理7, G包含(C1)–(C5)子构型之一,分以下5种情形讨论.令$C=\{1,2,\cdots,\Delta(G)+3\}$表示一个有$\Delta(G)+3$种颜色的集合.定义$G$的染色$f$, $f(v)=f'(v)$, $v\in V(H)$; $f(e)=f'(e)$, $e\in E(H)$.令$\phi(v),\phi'(v)$分别表示在染色f, f'中点v及其关联边、相邻点的颜色之和.

情形1 G存在一个3^-–点v与一个叶子相邻.

当$d_G(v)=2$时,设u_1,u_2是v的邻点.当$d_G(v)=3$时,设u_1,u_2,u_3是v的邻点, $d_G(u_1)=1$.设$H=G-u_1$,由归纳假设可知, H有一个$(\Delta(G)+3)$–NFSDTC f'.

由于H是G的真子图, $\Delta(H)\leqslant\Delta(G)$.下面将$H$的一个$(\Delta(G)+3)$–NFSDTC f'拓展为G的一个$(\Delta(G)+3)$–NFSDTC f,则只需对vu_1和u_1进行染色.由于f是一个正常全染色,所以至少有$C\setminus\{f(v),f(vu_2),f(vu_3)\}\geqslant 7$种颜色去染$vu_1$ (u_3存在),然后对u_1染色,有$C\setminus\{f(vu_1),f(v)\}\geqslant 8$种颜色去染,故$\phi(v)$至少有3个不同的取值,根据引理4,有$\phi(v)\neq\phi(u_2)$且$\phi(v)\neq\phi(u_3)$.又由引理5,有$\phi(v)\neq\phi(u_1)$.从而得到$G$的一个$(\Delta(G)+3)$–邻点全和可区别全染色.

情形2 G存在一条长为$n-1$的路或圈$v_1v_2\cdots v_{n-1}v_n$($v_1=v_n$时为圈)(如图3), $n\geqslant 4$, 满足$d(v_1)\geqslant 3$, $d(v_n)\geqslant 3$且对所有$i=2,3,\cdots,n-1$,有$d_G(v_i)=2$.

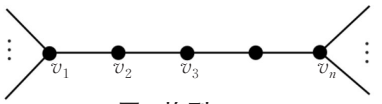


图3 构型(C2)

Fig.3 Configuration (C2)

根据n的值,分以下2种情形讨论.

情形2.1 $n=4$.

令$H=G-v_3$,由归纳假设可知, H有一个$(\Delta(G)+3)$–NFSDTC f'.下面对v_3及其关联边染色,将f'的染色拓展为G的一个$(\Delta(G)+3)$–NFSDTC f.

不失一般性,设$d_G(v_4)=\Delta(G)$, w_i为v_4不同于v_3的其他邻点,其中$1\leqslant i\leqslant\Delta(G)-1$.由于$f'$是一个正常全染色,有

$$f(v_3v_4)\notin\{f'(v_4w_i)\,|\,1\leqslant i\leqslant\Delta(G)-1\}\cup\{f'(v_4)\},$$

因此v_3v_4有3种可用色.同理,

$$f(v_3)\notin\{f'(v_2),f'(v_4),f(v_3v_4)\},\ f(v_2v_3)\notin\{f'(v_1v_2),f'(v_2),f(v_3),f(v_3v_4)\},$$

可得v_3有种$\Delta(G)$可用色，v_2v_3有种$\Delta(G)-1$可用色.根据定义1可知，v_3v_4至多有一种可用色使得$\phi(v_2)=\phi(v_3)$，v_2v_3至多有一种可用色使得$\phi(v_3)=\phi(v_4)$，故得v_3v_4至少有2种可用色使得$\phi(v_2)\neq\phi(v_3)$，v_2v_3至少有$\Delta(G)-2$种可用色使得$\phi(v_3)\neq\phi(v_4)$.

因为v_3有$\Delta(G)$种可用色,根据引理9可知，$f(v_3v_4)+f(v_3)$至少有$\Delta(G)$个不同的值,进一步,$\phi(v_4)=\phi'(v_4)+f(v_3v_4)+f(v_3)$至少有$\Delta(G)$个不同的值,可使得$\phi(v_4)\neq\phi(w_i),1\leqslant i\leqslant\Delta(G)-1$.又$\Delta(G)\geqslant 7$，$f(v_2v_3)$至少有$\Delta(G)-2\geqslant 7-2=5$种可用色,即$\phi(v_2)=\phi'(v_2)+f(v_2v_3)+f(v_3)$至少有5个不同的值,可使得$\phi(v_2)\neq\phi(v_1)$.因此，$G$有一个$(\Delta(G)+3)$–NFSDTC f.

情形2.2　$n\geqslant 5$.

令$H=G-v_3$,由归纳假设知H存在一个$(\Delta(G)+3)$–NFSDTC f'.为了将f'的染色拓展为G的一个$(\Delta(G)+3)$–NFSDTC f,给点v_3以及边v_2v_3,v_3v_4重新分配变量y_1,y_2y_3.令$|S(y_1)|,|S(y_2)|,|S(y_3)|$分别表示点$v_3$及边$v_2v_3,v_3v_4$的可用色,显然有

$$|S(y_1)|\geqslant 5,\ |S(y_2)|\geqslant 5,\ |S(y_3)|\geqslant 5.$$

由染色条件可得多项式$Q_5(y_1,y_2,y_3)$:

$$\begin{aligned}&Q_5(y_1,y_2,y_3)\\&=\prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant 3}(y_i-y_j)(y_1+y_2+f(v_2)+f(v_1v_2)+f(v_1)-\phi(v_1))(y_3+f(v_4)+f(v_2)-\phi'(v_2))\\&\quad\times(y_2+f(v_2)+f(v_4)-\phi'(v_4))(y_1+y_3+f(v_4)+f(v_4v_5)+f(v_5)-\phi(v_5)).\end{aligned}$$

去掉$Q_5(y_1,y_2,y_3)$中的常数得:

$$\bar{Q}_5(y_1,y_2,y_3)=\prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant 3}(y_i-y_j)(y_1+y_2)y_3y_2(y_1+y_3).$$

易知$C_{Q_5}(y_1,y_2,y_3)=C_{\bar{Q}_5}(y_1,y_2,y_3)$,利用Matlab R2021b计算得$C_{\bar{Q}_5}(y_1^2y_2^3y_3^2)=1\neq 0$.从而由引理8知,图$G$存在一个由$f'$所延拓的$(\Delta(G)+3)$–邻点全和可区别全染色.

情形3　G存一个4^+–点v与一个叶子及其它的度$\leqslant 2$的$k-3$个顶点相邻.

设v的邻点为$v_1,v_2,\cdots,v_k$，$k\geqslant 4$,且$d_G(v_1)=1$，$d_G(v_i)\leqslant 2$,其中$i=2,3,\cdots,k-2$.记$u_i(\neq v)$是v_i的第二个邻点.如图4所示.

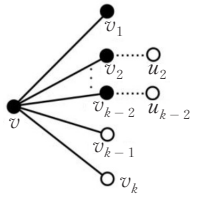


图4 构型(C3)
Fig.4 Configuration (C3)

令$H=G-v_1$,由归纳假设，H有一个$(\Delta(G)+3)$–NFSDTC f'. 由于H是G的真子图，$\Delta(H)\leqslant\Delta(G)$.下面将$H$的一个$(\Delta(G)+3)$–NFSDTC f'拓展为G的一个$(\Delta(G)+3)$–NFSDTC f.首先对vv_1进行染色,由于f是一个正常全染色,所以用$C\setminus\{f(vv_i)\,|\,2\leqslant i\leqslant k\}\cup\{f(v)\}=3$种颜色对$vv_1$正常染色,再对$v_1$进行染色,除去点$v$与边$vv_1$的颜色,用$C\setminus\{f(v),f(vv_1)\}$种颜色可对点$v_1$正常染色,故$\phi(v)=\phi'(v)+f(vv_1)+f(v_1)$至少有$\Delta(G)+1$种不同的取值,使得$\phi(v)\neq\phi(v_j),2\leqslant j\leqslant k$.又由引理5知$\phi(v)\neq\phi(v_1)$.因此，$f$是$G$的一个$(\Delta(G)+3)$–NFSDTC.

情形4　G存在一个3–面$[uv_1v_2]$满足$d(u)=2,d(v_1)=3$.

设$z(\neq u,v_2)$是v_1的第三个邻点.如图5所示.令$H=G-u$,由归纳假设可知,H有一个$(\Delta(G)+3)$–NFSDTC f'.下面对u及其关联边染色,将f'的染色拓展为G的一个$(\Delta(G)+3)$–NFSDTC f.

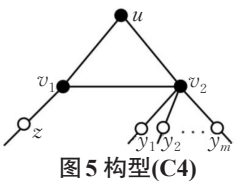


图5 构型(C4)
Fig.5 Configuration (C4)

不失一般性,设$d_G(v_2)=\Delta(G)$，y_m为v_4不同于v_3的其他邻点,其中$0\leqslant m\leqslant\Delta(G)-2$.由于$f'$是一个正常全染色,有

$$f(uv_2)\notin\{f'(v_2y_m)\,|\,0\leqslant m\leqslant\Delta(G)-2\}\cup\{f'(v_1v_2),f'(v_2)\},$$

因此，uv_2有3种可用色.同理，

$$f(u)\notin\{f'(v_2),f'(v_1),f(uv_2)\},\ f(v_1u)\notin\{f'(v_1z),f'(v_1v_2),f'(v_1),f(u),f(uv_2)\},$$

可得v_3有$\Delta(G)$种可用色，uv_1有$\Delta(G)-2$可用色.根据定义1可知，uv_2至多有一种可用色使得$\phi(u)=\phi(v_1)$，uv_1至多有一种可用色使得$\phi(u)=\phi(v_2)$,故得uv_2至少有2种可用色使得$\phi(u)\neq\phi(v_1)$，uv_1至少有$\Delta(G)-3$种可用色使得$\phi(u)\neq\phi(v_2)$.

由于u有$\Delta(G)$种可用色,根据引理9可知，$f(uv_2)+f(u)$至少有$\Delta(G)$个不同的值,进一步，$\phi(v_2)=\phi'(v_2)+f(uv_2)+f(u)$至少有$\Delta(G)$个不同的值,可使得$\phi(v_2)\neq\phi(y_m)$, $0\leqslant m\leqslant\Delta(G)-2$，$\phi(v_2)\neq\phi(v_1)$.又$\Delta(G)\geqslant 7$，$f(uv_1)$至少有$\Delta(G)-3\geqslant 7-3=4$种可用色,即$\phi(v_1)=\phi'(v_1)+f(uv_1)+f(u)$至少有4个不同的值,可使得$\phi(v_1)\neq\phi(z)$.因此，$G$有一个$(\Delta(G)+3)$−NFSDTC f.

情形5 G存在两个3−面$[xu_1v_1]$和$[xu_2v_2]$满足$d(x)=4$,且$d(u_1)=d(u_2)=2$.

令$H=G-u_2$,由归纳假设可知，H有一个$(\Delta(G)+3)$−NFSDTC f'. 下面对u_2及其关联边染色，将f'的染色拓展为G的一个$(\Delta(G)+3)$−NFSDTC f.

不失一般性,设$d_G(v_1)=d_G(v_2)=\Delta(G)$.设$y_1,y_2,\cdots,y_m$是$v_1$不同于$x$和$u_1$的邻点，$z_1,z_2,\cdots,z_n$是$v_2$不同于$x$和$u_2$的邻点，$m,n\geqslant 0$.如图6所示.由于$f'$是一个正常全染色,有

$$f(u_2,v_2)\notin\{f'(v_2z_n)\,|\,0\leqslant n\leqslant\Delta(G)-2\}\cup\{f'(v_2),f'(v_2x)\},$$

因此，u_2v_2有3种可用色.同理，

$$f(u_2)\notin\{f'(v_2),f'(x),f(u_2v_2)\},$$

$$f(u_2x)\notin\{f'(u_1x),f'(v_1x),f'(x),f'(xv_2),f(u_2v_2),f(u_2)\},$$

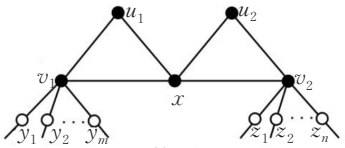


图6 构型(C5)

Fig.6 Configuration (C5)

可得v_3有$\Delta(G)$种可用色，v_2v_3有$\Delta(G)-3$种可用色.根据定义1可知，u_2v_2至多有一种可用色使得$\phi(u_2)=\phi(x)$，u_2x至多有一种可用色使得$\phi(u_2)=\phi(v_2)$，故得u_2v_2至少有2种可用色使得$\phi(u_2)\neq\phi(x)$，u_2x至少有$\Delta(G)-4$ 种可用色使得$\phi(u_2)\neq\phi(v_2)$.

根据上述分析可知，u_2有$\Delta(G)$种可用色,又由引理9知,$f(u_2v_2)+f(u_2)$至少有$\Delta(G)$个不同的值,进一步，$\phi(v_2)=\phi'(v_2)+f(u_2v_2)+f(u_2)$至少有$\Delta(G)$个不同的值,可使得

$$\phi(v_2)\neq\phi(z_n),\ 0\leqslant n\leqslant\Delta(G)-2,\ \phi(v_2)\neq\phi(x).$$

又$\Delta(G)\geqslant 7$，$f(v_2v_3)$至少有$\Delta(G)-4\geqslant 7-4=3$ 种可用色，即$\phi(x)=\phi'(x)+f(xu_2)+f(u_2)$至少有3个不同的值,可使得$\phi(x)\neq\phi(v_1)$, $\phi(x)\neq\phi(u_1)$.因此，f是G的一个$(\Delta(G)+3)$−NFSDTC.

综上所述,定理得证.

参 考 文 献

1 Bondy J A, Murty U S R. Graph Theory with Applications[M]. New York: Macmillan Press, 1976.

2 张忠辅，陈祥恩，李敬文，等. 关于图的邻点可区别全染色[J]. 中国科学: A辑，2004，34(5): 574−583.

3 Wang Weifan, Huang Danjun. The adjacent vertex distinguishing total coloring of planar graphs[J]. Journal of Combinatorial Optimization, 2014, 27(2): 379−396.

4 Sun Lin, Cheng Xiaohan, Wu Jianliang. The adjacent vertex distinguishing total coloring of planar graphs without adjacent 4−cycles[J]. Journal of Combinatorial Optimization, 2017, 33(2): 779−790.

5 Hu Jie, Wang Guanghui, Wu Jianliang, et al. Adjacent vertex distinguishing total coloring of planar graphs with maximum degree 9[J]. Discrete Mathematics, 2019, 342(5): 1 392−1 402.

6 Chang Yulin, Hu Jie, Wang Guanghui, et al. Adjacent vertex distinguishing total coloring of planar graphs with maximum degree 8[J], Discrete Mathematics, 2020, 343(10): 112014.

7 Karonski M, Luczak T, Thomason A. Edge weights and vertex colours[J]. Journal of Combinatorial Theory: Series B, 2004, 91: 151−157.

8 Pilsniak M, Wozniak M. On the total neighbor distinguishing index by sums[J]. Graphs and Combinatorics, 2015, 31(3): 771–782.
9 Qu Cunquan, Wang Guanghui, Wu Jianliang, et al. On the neighbor sum distinguishing total coloring of planar graphs[J]. Theoretical Computer Science, 2016, 609(1): 162–170.
10 Song Wenyao, Duan Yuanyuan, Miao Lianying. Neighbor sum distinguishing total coloring of IC–planar graphs[J]. Discrete Mathematics, 2020, 343(8): 111918.
11 Du Hongjun, Wang Huijuan, Wu Weili. Neighbor sum distinguishing total coloring of planar graphs with restrained cycles[J]. Discrete Mathematics, Algorithms and Applications, 2024, 16(4): 2350046.
12 Flandrin E, Li H, Marczyk A, et al. A note on neighbor expanded sum distinguishing index[J]. Discussiones Mathematicae Graph Theory, 2017, 37(1): 29–37.
13 崔福祥, 杨 超, 叶宏波, 等. 图的邻点全和可区别全染色[J]. 运筹学学报, 2023, 27(1): 149–158.
14 崔福祥, 杨 超, 叶宏波, 等. 联图的邻点全和可区别全染色[J]. 吉林大学学报: 理学版, 2022, 60(1): 44–52.
15 李志军, 文 飞. 单圈图的邻点全和可区别全染色[J]. 吉林大学学报: 理学版. 2024, 62(3): 497–502.
16 Liu Linzhong, Zhang Zhongfu, Wang Jianfang. On the adjacent strong edge coloring of outer plane graphs[J]. Journal of Mathematical Research and Exposition, 2005, 25(2): 255–266.
17 Guo Jing, Chen Xiang'en. Adjacent vertex distinguishing I–total coloring of outerplanar graphs[J]. Chinese Quarterly Journal of Mathematics, 2017, 32(4): 382–394.
18 Wang Yiqiao, Wang Weifan. Adjacent vertex distinguishing total colorings of outerplanar graphs[J]. Journal of Combinatorial Optimization, 2010, 2(19): 123–133.
19 Alon N. Combinatorial Nullstellensatz[J]. Combin Probab Comput, 1999, 8: 7–29.
20 Li Hualong, Ding Laihao, Liu Bingqian, et al. Neighbor sum distinguishing total colorings of planar graphs[J]. Journal of Combinatorial Optimization, 2015, 30: 675–688.

Neighbor Full Sum Distinguishing Total Coloring of Outerplanar Graphs

Wang Wenjie, Li Zhijun, Wen Fei

(*Institute of Applied Mathematics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou* 730070, *China*)

Abstract: A neighbor full sum distinguishing total coloring of a graph G is a proper total coloring such that no two adjacent vertices meet the same full sum, where the full sum of a vertex consists of all colors assigned on the vertex and its incident elements, the minimum number k of the colors required is called the neighbor full sum distinguishing total chromatic number, denoted by $ftndi_{\Sigma}(G)$. The neighbor full sum distinguishing total coloring of outerplanar graphs is considered by applying combinatorial nullstellensatz and structural analysis, and it's obtained that $ftndi_{\Sigma}(G) \leqslant \Delta(G)+3$ if G is a normal outerplanar graph with maximum degree $\Delta(G) \geqslant 7$.

Keywords: outerplanar graph; proper total coloring; neighbor full sum distinguishing total coloring; combinatorial nullstellensatz

[责任编辑: 陈玮]